1. a) $\mathcal{B} := \{1, x, \dots, x^n\}$ is een basis van $P_n(\mathbb{R})$.

b) $\mathcal{B}$ heeft $n+1$ elementen, dus $\dim(P_n(\mathbb{R})) = n+1$

$E_n(\mathbb{R}) := \{ p \in P_n(\mathbb{R}) \mid p(x) = p(-x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$

c) We tonen drie dingen aan:

I: $\underline{0} \in E_n(\mathbb{R})$: Voor het nulpolynoom $\underline{0}$ geldt dat

$$\underline{0}(x) = 0 = \underline{0}(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

II: $x, y \in E_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow x+y \in E_n(\mathbb{R})$: Als $x, y \in E_n(\mathbb{R})$, dan geldt

$$x(t) = x(-t) \ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \text{en} \quad y(t) = y(-t) \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Nemen we dus willekeurige $x, y \in E_n(\mathbb{R})$, dan geldt

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t) = x(-t) + y(-t) = (x+y)(-t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Het volgt dat $x+y \in E_n(\mathbb{R})$, hetgeen we wilden laten zien.

III: $x \in E_n(\mathbb{R})$ en $\lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda x \in E_n(\mathbb{R})$: Neem willekeurige $x \in \cancel{P_n} E_n(\mathbb{R})$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat

$$(\lambda x)(t) = \lambda \cdot x(t) = \lambda x(-t) = (\lambda x)(-t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Het volgt dat $\lambda x \in E_n(\mathbb{R})$, hetgeen we wilden laten zien.

Uit deze drie dingen volgt dat $E_n(\mathbb{R})$ een deelruimte van $P_n(\mathbb{R})$ is.

d) Het is niet moeilijk in te zien, dat een element x uit $E_n(\mathbb{R})$ geen oneven term kan hebben. (Het verschil $x(t) - x(-t)$ kan dan nooit nul worden.) Omgekeerd zijn alle ~~even~~ monomen x^{2n} met een even macht even. Een basis van $E_6(\mathbb{R})$ is dus $\{1, x^2, x^4, x^6\}$

e) $\dim(E_6(\mathbb{R})) = \#\{1, x^2, x^4, x^6\} = 4$

2. a) $\dim(M_{n\times n}(\mathbb{R})) = n^2$

b) Definieer

$$T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto \tfrac{1}{2}(M^t - M)$$

Neem willekeurige $M = \{M_{ij}\}_{ij}$, $N = \{N_{ij}\}_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ en $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dan geldt dat $T(M+N) = \frac{1}{2}\left((M+N)^t - (M+N)\right) = \frac{1}{2}\left((\{M_{ij}\}_{ij} + \{N_{ij}\}_{ij})^t - (M+N)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\{M_{ij} + N_{ij}\}_{ij}^t - M - N\right) = \frac{1}{2}\left(\{M_{ji} + N_{ji}\}_{ij} - M - N\right) = \frac{1}{2}\left(\{M_{ji}\}_{ij} + \{N_{ji}\}_{ij} - M - N\right)$

$= \frac{1}{2}(M^t - M) + \frac{1}{2}(N^t - N) = T(M) + T(N).$

Verder geldt:

$$T(\lambda M) = T(\lambda\{M_{ij}\}_{ij}) = T(\{\lambda M_{ij}\}_{ij}) = \tfrac{1}{2}\left(\{\lambda M_{ij}\}_{ij}^t - \{\lambda M_{ij}\}_{ij}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\lambda\{M_{ji}\}_{ij} - \lambda\{M_{ij}\}_{ij}\right) = \lambda \cdot \tfrac{1}{2}(M^t - M) = \lambda T(M)$$

Dit is precies wat aangetoond diende te worden.

c) "$\Rightarrow$": Neem aan dat $M \in N(T)$. Dan geldt dat

$$0 = T(M) = \frac{1}{2}(M^t - M)$$

en daaruit dat $M^t = M$. Dus M is symmetrisch.

"$\Leftarrow$": Neem aan dat M is symmetrisch. Dan geldt $M^t = M$, en dus

$$T(M) = \frac{1}{2}(M^t - M) = 0.$$

Het volgt dat $M \in N(T)$.

We schrijven nu $E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

en $\beta := \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ vormt een geordende basis.

d) We berekenen achtereenvolgens

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot E_3 - \frac{1}{2} E_2$$

$$T(E_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} E_2 - \frac{1}{2} E_3$$

$$T(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt dat

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) Het is duidelijk dat $\text{rang}(T) = \text{rang}([T]_\beta) = 1$.

f) Met de dimensiestelling volgt dat

$$\dim(N(T)) = \dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) - \text{rang}(T) = 4 - 1 = 3.$$

3 $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a)
$$\text{rang}(A) = \underset{r_3 \mapsto r_3 - 3r_1}{\overset{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1}{\text{rang}}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} = 2.$$

b) Bij A hoort een afbeelding $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Met de dimensiestelling volgt dan dat

$$\dim(N(L_A)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \text{rang}(L_A) = 4 - \text{rang}(A) = 4 - 2 = 2.$$

c) Schrijf $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dan is

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Schrijf $x_3 = s$, $x_4 = t$. Dan geldt dat

$x_1 = \frac{1}{5}s - \frac{3}{5}t$ en

$x_2 = \frac{3}{5}s - \frac{4}{5}t$.

Dan is de oplossingsverzameling

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5}s - \frac{3}{5}t \\ \frac{3}{5}s - \frac{4}{5}t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

d) De aangevulde matrix is

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right].$$

Hieruit volgt dat dit stelsel geen oplossingen heeft. De oplossingsverzameling is $\{\}$.

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Er geldt dat

$$P_\lambda = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left((-1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\right)$$

$$= -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

b) De eigenwaarden zijn de nulpunten van P_λ, dus dat zijn

$\lambda_1 = 1$ en

$\lambda_2 = -1$

c) Voor λ_1: een eigenvector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ voldoet aan

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 + 2x_2 \\ 0 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Elke vector met $x_1 = x_2$ voldoet hieraan en voorbeelden van eigenvectoren zijn daarom

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voor λ_2: een eigenvector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ voldoet aan

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Voor zo'n vector geldt dus dat $x_2 = 0$ en $x_1 = x_2 + x_3 = x_3$. Een eigenvector is dus bijvoorbeeld

$$e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d) Hiervoor moeten we twee dingen nagaan.

I: Pλ splijt over het lichaam $\mathbb{R}$: Dit hebben we gezien bij a).

II: Voor elke eigenwaarde komt zijn algebraische multipliciteit overeen met zijn meetkundige multipliciteit: Dit volgt meteen uit b) en c).